Απο τον ορισμό προκύπτουν άμεσα οι ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{\ell} \overset{(1)}{\iff} \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \| f(\bar{x}) - \bar{\ell} \| = 0$$

$$- \, '' \, - \quad \overset{(2)}{\iff} \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f_j(\bar{x}) = \bar{\ell}_j \quad , j = 1,2,\dots m$$

$$- \, '' \, - \quad \overset{(3)}{\iff} (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0,\delta) \cap U \setminus \{\bar{x}_0\}) : \bar{f}(\bar{x}) \in B(\bar{\ell},\varepsilon)$$

<u>Απόδειξη</u>

Η (1) ισχύει αφού $\bar{f}(\bar{x}_\nu) \to \bar{\ell} \iff \| f(\bar{x}_\nu) - \bar{\ell} \| \to 0$

Η (2) ισχύει αφού:

$$\bar{f}(\bar{x}_\nu) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}_\nu) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}_\nu) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_m \end{pmatrix} = \bar{\ell} \overset{\text{πρόταση}}{\iff}$$

$$\iff (\forall j = 1,2,\dots,m) : f_j(\bar{x}_\nu) \to \ell_j$$

Η (3) ισχύει αφού $\bar{f}(\bar{x}) \in B(\bar{\ell},\varepsilon) \iff \| f(\bar{x}) - \bar{\ell} \| < \varepsilon$

και αφού $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \| f(\bar{x}) - \bar{\ell} \| = 0 \overset{\text{πρόταση}}{\iff}$

$$\iff (\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)(\forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0,\delta) \cap U \setminus \{\bar{x}_0\}) : \| f(\bar{x}) - \bar{\ell} \| < \varepsilon$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Απο την άλγεβρα ορίων ακολουθιών προκύπτουν οι εξής ιδιότητες, εαν:
Εστω $\bar{f}, \bar{g} : U \to \mathbb{R}^m$, $\bar{x}_0$ σ.σ. του U, $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{\ell}$ και $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{g}(\bar{x}) = \bar{m}$. Τότε:

α) $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (\bar{f}+\bar{g})(\bar{x}) = \bar{\ell} + \bar{m}$

β) $a \cdot \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = a \cdot \bar{\ell}$, $\forall a \in \mathbb{R}$

γ) Εαν $T_h : V \to \mathbb{R}^k$ με $\bar{f}(U) \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^m$, $\bar{\ell}$ σ.σ. του $\bar{f}(U)$ και $\lim_{\bar{y}\to\bar{\ell}} \bar{h}(\bar{y}) = \bar{\rho} \in \mathbb{R}^k$ τότε $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (\bar{h} \circ \bar{f})(\bar{x}) = \bar{\rho}$

Απόδειξη

για το (γ) $\longrightarrow$ έστω $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ και $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \bar{\ell}$

τότε και $\underbrace{f(\bar{x}_\nu)}_{\in f(U)} \longrightarrow \bar{\ell}$ ~~τότε~~ αφού ισχύει

ότι:

$$\lim_{\bar{y}\to\bar{\ell}} \bar{h}(\bar{y}) = \bar{\rho}$$

έχουμε, πως: $\bar{h}(\bar{f}(\bar{x}_\nu)) \longrightarrow \bar{\rho}$

ΒΑΣΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Τα προηγούμενα περικλείουν για $m=1$, τα πιο σημαντικά της θεωρίας ορίων πραγματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Αν θέσουμε και $n=1$ έχουμε τα σημαντικότερα της θεωρίας ορίων πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής

ορισμός (ΓΕΝΙΚΟΣ)

Η $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται:

α) συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U \Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subseteq U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$: $\bar{f}(\bar{x}_\nu) \to \bar{f}(\bar{x}_0)$

β) συνεχής στο $A \subseteq U \Leftrightarrow f$ συνεχής σε κάθε $\bar{x}_0 \in A$

γ) συνεχής $\Leftrightarrow \bar{f}$ συνεχής σε κάθε $\bar{x}_0 \in U$

παρατήρηση

α) Αν $\bar{x}_0$ μεμονωμένο σημείο του U (δηλ. ($\exists \varepsilon>0$) ώστε $B(\bar{x}_0, \varepsilon) \cap U = \{\bar{x}_0\}$) τότε η $\bar{f}$ πάντα συνεχής στο $\bar{x}_0$

β) Αν $\bar{x}_0$ είναι σσ του U, τότε:

$\bar{f}$ συνεχής στο $\bar{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $\bar{f}, \bar{g}: U \to \mathbb{R}^m$ συνεχείς συναρτήσεις στο $\bar{x}_0 \in U$. Τότε $\bar{f}+\bar{g}$, $a \cdot \bar{f}$ $(a \in \mathbb{R})$ συνεχείς στο U. Επίσης, $\bar{h}: V \to \mathbb{R}^k$ με $\bar{f}(U) \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^m$ συνεχής στο $\bar{f}(\bar{x}_0)$ η) τότε $\bar{h} \circ \bar{f}: U \to \mathbb{R}^k$ συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: το σύνολο $C(U, \mathbb{R}^m) = \{\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m : f \text{ συνεχής}\}$ δηλαδή είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων από το $U \subseteq \mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^m$ όπου είναι ο δ.χ.

ΘΕΩΡΗΜΑ:
Έστω η συνάρτηση $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής και $U \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές (δηλ. στον $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ κλειστό και φραγμένο) τότε $\bar{f}(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ συμπαγές. Ειδικότερα εάν $m=1$ (για πραγματικές συναρτήσεις $f: U \to \mathbb{R}$ λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ
Δηλ. θδο συνεχείς εικόνα συμπαγούς είναι συνεχής

① Ισχύει ότι $U \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές (δηλ. η κλειστό-φραγμένο)
$\Leftrightarrow (\forall (x_\nu) \subseteq U)(\exists (x_{k_\nu}) \subseteq (x_\nu))\ x_{k_\nu} \to x_0 \in U \Rightarrow$
$\Rightarrow$ αφού U φραγμένο $\xrightarrow{B-W} \exists (x_{k_\nu}) \subseteq (x_\nu) \subseteq U$

$\Downarrow$

$[(\exists c>0) : \|\bar{x}\| < c \ \forall \bar{x} \in U]$

Αφού το U κλειστό $\overset{\text{προτ.}}{\Longleftrightarrow} \forall (y_\nu) \subseteq U \quad \bar{y}_\nu \to \bar{y}_0 \in \mathbb{R}^n$
Έχουμε ότι $\bar{x}_0 \in U$

② $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής και $U \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\Rightarrow \bar{f}(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ συμπαγές
• έστω $(\bar{y}_\nu) \subseteq \bar{f}(U) \Leftrightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subseteq U : \bar{y}_\nu = \bar{f}(\bar{x}_\nu) \xrightarrow{U \text{ συμπ.}}$
$\exists (\bar{x}_{k_\nu}) \subseteq (\bar{x}_\nu) : \bar{x}_{k_\nu} \to x_0 \in U \xrightarrow{f \text{ συνεχ.}} \underbrace{\bar{f}(\bar{x}_{k_\nu})}_{\bar{y}_{k_\nu}} \to \underbrace{\bar{f}(\bar{x}_0)}_{\bar{f}(U)}$

③ Αν $m=1$ έχουμε $f(U) \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές, δηλ. κλειστό και φραγμένο $f(U)$ φραγμένο $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \inf f = \inf f(U)$, $\sup f = \sup f(U) \in \mathbb{R}$

(40)

Δίχως βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε το $\inf f$

$(\exists \inf f \in \mathbb{R}) \Rightarrow \exists \bar{x}_\nu \in U : f(\bar{x}_\nu) \in [\inf f, \inf f + \frac{1}{\nu}]$

$\Rightarrow f(\bar{x}_\nu) \to \inf f$ από ισοσυγκλίνουσων ακολουθιών

$\left(\Rightarrow f(\bar{x}_\nu) - \inf f \in [0, \frac{1}{\nu}] \Rightarrow \right.$

$\left. \Rightarrow 0 \leq |f(\bar{x}_\nu) - \inf f| \leq \frac{1}{\nu} \right)$

$\lim |f(\bar{x}_\nu) - \inf f| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar{x}_\nu) \to \inf f$

από <u>πρόταση</u> (*)

έστω V κλειστό $\Leftrightarrow (\forall (\bar{x}_\nu)) \subseteq V : \bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{x} \in U$

$f(U)$ κλειστό $\xRightarrow{(*)} \inf f \in f(U) \Rightarrow$

$\Rightarrow \inf f = \min f$